M11 - Aufgaben zum Trainieren der Ableitungsregeln - Lösungen

1. Leite folgende Funktionen mit der Produktregel ab!

   (a) $f_1(x) = (x+1)(x+4)$

   (b) $f_2(x) = (3x+5)(x-2)$

   (c) $f_3(x) = (5x+13)(4x-17)$

   (d) $f_4(x) = (35+12x)(1-x)$

   (e) $f_5(x) = (14-3x)(16-9x)$

   (f) $f_6(x) = (x-4)(x^2+3)$

   (g) $f_7(x) = (x^2+5x)(8+25x)$

   (h) $f_8(x) = (3x^2+x)(13x-9x^2)$

   (i) $f_9(x) = (x-4)(x^2+3)$

Lösung: (a) $f_1'(x) = 2x+5$
(b) $f_2'(x) = 6x-1$
(c) $f_3'(x) = 40x-33$
(d) $f_4'(x) = -24x-23$
(e) $f_5'(x) = 54x-174$
(f) $f_6'(x) = 3x^2-8x+3$
(g) $f_7'(x) = 75x^2+266x+40$
(h) $f_8'(x) = -108x^3+90x^2+26x$
(i) $f_9'(x) = 3x^2-8x+3$

2. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen auf zwei Arten:
   (i) Ausmultiplizieren und Differenzieren
   (ii) mit Hilfe der Produktregel

   (a) $f(x) = (5x+3)^2$

   (b) $g(x) = 3(2x^2+2)^2$

   (c) $h(x) = 3x(4x+5)^2$

Lösung: (a) $f'(x) = 50x+30$
(b) $g'(x) = 48x^3+48x$
(c) $h'(x) = 144x^2+240x+75$

3. Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^{999}}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$ (c) $f(x) = \dfrac{x^2-x}{2\,x-5}$

(d) $f(x) = \dfrac{x+3}{7-x^2}$ (e) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ (f) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

(g) $f(x) = \dfrac{x^2\,\sin x}{x-\sqrt{x}}$ (h) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^{10}}$ (i) $f(x) = \dfrac{\tan x}{x^2}$

Lösung: (*a*) $-\,999\,x^{-1000}$ (*b*) $-\dfrac{3}{(x-3)^2}$ (*c*) $\dfrac{2\,x^2-10\,x+5}{(2\,x-5)^2}$

(*d*) $\dfrac{x^2+6\,x+7}{(7-x^2)^2}$ (*e*) $(x-2)'=1$ (*f*) $\dfrac{2\,x\,\cos x-\sin x}{2\,x\,\sqrt{x}}$

(*g*) $\dfrac{x\,\sin x\left(3\,x-\frac{5}{2}\sqrt{x}\right)+x^2\,(x-\sqrt{x})\cos x}{(x-\sqrt{x})^2}$ (*h*) $\dfrac{2\,(-5\,x^3+x^2+5)}{x^{11}}$

(*i*) $\dfrac{x-\sin 2x}{x^3\,\cos^2 x}$

4. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen mit Hilfe der Produktregel und mit Hilfe der Quotientenregel.

   (a) $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x^2}$

   (b) $g(x) = \dfrac{3x^2+4x}{\sqrt{x}}$

   (c) $h(x) = \dfrac{5x^3+6x^2}{x^7}$

Lösung: (a) $f'(x) = -\dfrac{6}{x^3}$

(b) $g'(x) = \dfrac{9}{2}\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

(c) $h'(x) = -\dfrac{20}{x^5}-\dfrac{30}{x^6}$

Aufgabe 5

Im Allgemeinen empfiehlt sich die Anwendung der Quotientenregel; bei c) und g) sollte man zunächst (mithilfe des Distributivgesetzes) den Funktionsterm umformen.

	f(x)	$D_f = D_{f\,max}$	f'(x)
a)	$f(x) = \frac{2x^2}{x^2-9}$	$\mathbb{R}\setminus\{-3\,;\,3\}$	$f'(x) = \frac{(x^2-9)\cdot 4x - 2x^2\cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \frac{-36x}{(x^2-9)^2}$
b)	$f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \frac{(x^2+4)\cdot 4 - 4x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2} = \frac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$
c)	$f(x) = \frac{10-5x}{x^3} = \frac{10}{x^3} - \frac{5}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x) = -\frac{30}{x^4} + \frac{10}{x^3} = \frac{10(x-3)}{x^4}$
d)	$f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$f'(x) = \frac{(x+1)\cdot 2x - (x^2+3)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$
e)	$f(x) = \frac{x^2+ax}{x+1};\ a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$f'(x) = \frac{(x+1)(2x+a) - (x^2+ax)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+a}{(x+1)^2}$
f)	$f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}$
g)	$f(x) = \frac{2x^3+2}{x^2} = 2 + \frac{2}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x) = -\frac{4}{x^3}$
h)	$f(x) = \frac{2x^2-4a^2}{x^2-a^2};\ a \in \mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}\setminus\{-a\,;\,a\}$	$f'(x) = \frac{(x^2-a^2)\cdot 4x - (2x^2-4a^2)\cdot 2x}{(x^2-a^2)^2} = \frac{4a^2x}{(x^2-a^2)^2}$
i)	$f(x) = \frac{2-x}{x^2-x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\,;\,1\}$	$f'(x) = \frac{(x^2-x)\cdot(-1) - (2-x)(2x-1)}{(x2-x)^2} = \frac{x^2-4x+2}{(x^2-x)^2}$
j)	$f(x) = \frac{x^2}{x+k};\ k \in \mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}\setminus\{-k\}$	$f'(x) = \frac{(x+k)\cdot 2x - x^2\cdot 1}{(x+k)^2} = \frac{x^2+2kx}{(x+k)^2}$

(1) Durch O (0 | 0) verlaufen die Graphen zu a), b), e) und j).
(2) Achsensymmetrisch zur y-Achse sind die Graphen zu a) und h).
(3) Punktsymmetrisch zum Ursprung ist der Graph zu b).
(4) Die Graphen zu d) und h) schneiden die y-Achse oberhalb des Ursprungs.
(5) Keiner der zehn Graphen schneidet die y-Achse unterhalb des Ursprungs.
(6) Die Graphen zu e) und h) haben mit der y-Achse mehr als einen Punkt gemeinsam.
(7) Eine waagrechte Asymptote besitzen die Graphen zu a), b), c), f), h) und i).
(8) Genau eine senkrechte Asymptote besitzen die Graphen zu c), d), e), f), g) und j).