Berechnung der Ableitung von f(x) an einer Stelle x_0

Beispielfunktion: $f: x \mapsto -x^2 + 1$; gesucht: $f'(x_0)$

Standardmethode: $x \to x_0$

Die Stelle x rückt immer näher an x_0 heran.

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

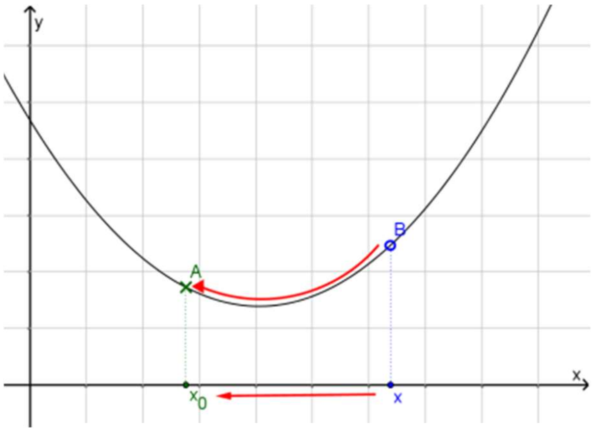

Abbildung allgemein (nicht die Beispielfunktion)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(-x^2+1)-(-x_0^2+1)}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{-x^2 + 1 + x_0^2 - 1}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{-(x^2 - x_0^2)}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{-(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} -(x + x_0) =$$
$$= -2x_0$$
$$\Rightarrow f'(x_0) = -2x_0$$

konkrete Ableitungswerte: Einsetzen, z.B.

$x_0 = 2 \Rightarrow f'(2) = -2 \cdot 2 = -4$

$x_0 = 0 \Rightarrow f'(0) = -2 \cdot 0 = 0$ (waagr. Tangente)

$x_0 = -1 \Rightarrow f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$

Die h-Methode: $h \to 0$

Statt $x \to x_0$ lässt man den Abstand h der beiden Punkte gegen Null gehen.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(x_0 + h)^2 + 1 - (-x_0^2 + 1)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(x_0^2 + 2x_0 h + h^2) + 1 + x_0^2 - 1}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2x_0 h - h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-2x_0 - h)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} (-2x_0 - h) =$$
$$= -2x_0$$
$$\Rightarrow f'(x_0) = -2x_0$$

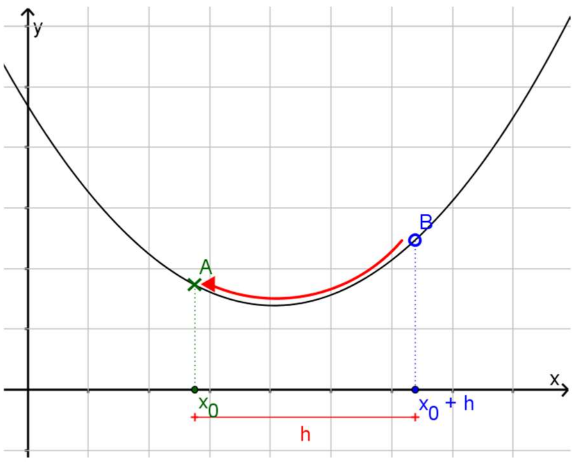

Abbildung allgemein (nicht die Beispielfunktion)

Vorteil h-Methode: Nenner ist immer nur $h \to$ keine Polynomdivision nötig

Nachteil: Zähler in der Regel schwieriger zu vereinfachen

