

M11 - Kurvendiskussion

Um Funktionsgraphen möglichst genau zeichnen zu können, werden verschiedene Eigenschaften von Funktionen untersucht. Dabei benötigt man vor allem den Funktionsterm und die Terme der 1. und 2. Ableitung (selten den der 3. Ableitung).

Kursiv-blaue Textstellen: Nach derzeitigem Lehrplan nicht verlangt, aber der Vollständigkeit halber aufgeführt.

Untersuchung von $f(x)$

1. Definitionsmenge \mathbb{D}_f

Ohne weitere Angaben gilt $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_{max}$. Gesucht sind dann mögliche „verbotene Stellen“ (Nenner Null, negativer Radikand ...). Für alle später berechneten Punkte muss immer überprüft werden, ob sie zur Definitionsmenge gehören.

2. Symmetrie

Überprüft wird i.d.R. die Punktsymmetrie zum Ursprung bzw. die Achsensymmetrie zur y-Achse. Falls eine Symmetrie vorliegt, kann dies im Folgenden für „Abkürzungen“ benutzt werden.

3. Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen (Achsenabschnitt; Nullstellen x_{01}, x_{02}, \dots)

Bei mehrfachen Nullstellen sollte ihre Ordnung (Vorzeichenwechsel!) notiert werden.

4. Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs; Asymptoten

Grenzwerte gegen $\pm\infty$ (\rightarrow mögl. waagrechte/schräge Asymptote); ggf. Grenzwerte gegen alle Definitionslücken (\rightarrow senkrechte Asymptoten an Polstellen *oder behebbarer Definitionslücken*)

* Mögliche Zusatzaufgaben (nicht immer verlangt/nötig)

- Vorzeichentabelle (Felderabstreichen): „Feldwechsel“ jeweils an Nullstellen und Definitionslücken
- *Erstellen einer stetigen Fortsetzung, wenn behebbarer Definitionslücken vorliegen; in diesem Fall Weiterrechnen mit der stetigen Fortsetzung (starke Vereinfachung)*

Untersuchung von $f'(x)$

5. Nullstellen von $f'(x)$: x_{11}, x_{12}, \dots

An den Nullstellen liegen waagrechte Tangenten vor (\rightarrow lokales Extremum oder Terrassenpunkt)

6. Monotonieverhalten und Extrema

Monotoniebestimmung mit Vorzeichentabelle von $f'(x)$ oder mit Hilfe der zweiten Ableitung. So lässt sich auch die Art der Extrema bestimmen.

Untersuchung von $f''(x)$

7. Nullstellen von $f''(x)$: x_{21}, x_{22}, \dots

An den Nullstellen liegen Flachpunkte vor (\rightarrow Wendepunkt, Terrassenpunkt *oder „reiner“ Flachpunkt*)

8. Krümmungsverhalten und Wendepunkte bzw. Terrassenpunkte

Krümmungsbestimmung mit Vorzeichentabelle von $f''(x)$ oder mit Hilfe der dritten Ableitung. So lässt sich auch die Art der Flachpunkte bestimmen.

Zeichnen des Graphen

Man berechnet die y-Koordinaten aller besonderen Punkte, sofern noch nicht erledigt. Dann wird unter Zuhilfenahme aller ermittelten Punkte, Steigungen, Asymptoten etc. der Graph gezeichnet.

Geometrische Bedeutung der Ableitungen

$f'(x)$ – 1. Ableitung: Steigung des Graphen (Änderung des Funktionswertes)

Anschaulich: Geht es rauf ($f'(x) > 0$) oder runter ($f'(x) < 0$)?

Ist die 1. Ableitung an einer Stelle 0, gibt es dort einen Punkt mit waagrechter Tangente. Dies kann ein (lokales) Extremum (mit oder ohne Flachpunkteigenschaft) oder ein Terrassenpunkt sein.

$f''(x)$ – 2. Ableitung: Krümmung des Graphen (Änderung der Steigung)

Anschaulich: Muss beim „Abfahren“ das Lenkrad nach rechts ($f''(x) < 0$) oder nach links ($f''(x) > 0$) eingeschlagen werden?

Ist die 2. Ableitung an einer Stelle 0, gibt es dort einen Flachpunkt, an dem sich die Steigung nicht ändert. Spezialfälle von Flachpunkten sind Wendepunkte und Terrassenpunkte.

Besondere Punkte

Nullstelle $\Leftrightarrow f(x) = 0$

(lokales) Maximum / Hochpunkt $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ und $f'(x)$ wechselt Vorzeichen von + nach -

$\hookrightarrow f'(x) = 0, f''(x) < 0 \Rightarrow$ HOP

(lokales) Minimum / Tiefpunkt: $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ und $f'(x)$ wechselt Vorzeichen von - nach +

$\hookrightarrow f'(x) = 0, f''(x) > 0 \Rightarrow$ TIP

Flachpunkt $\Leftrightarrow f''(x) = 0$

\hookrightarrow Wendepunkt \Leftrightarrow Vorzeichenwechsel von $f''(x)$

$\hookrightarrow f''(x) = 0, f'''(x) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

\hookrightarrow Wendepunkt mit $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ Terrassenpunkt

Beispielfunktion

$$f(x) = (x - 2)^3 \cdot (x + 1)^2 \cdot x^4$$

Nullstellen: A, E, I

Punkte mit waagr. Tangente: A, C, E, G, I

\hookrightarrow Hochpunkte: A, E

\hookrightarrow Tiefpunkte: C, G

Flachpunkte: E (+ B, D, F, H, I)

\hookrightarrow Wendepunkte: B, D, F, H (+ I)

\hookrightarrow Terrassenpunkt: I

Koordinaten
(auf 2D gerundet)

A (-1,00 / 0,00)
B (-0,90 / -0,16)
C (-0,71 / -0,43)
D (-0,51 / -0,26)
E (0,00 / 0,00)
F (0,89 / -3,07)
G (1,26 / -5,22)
H (1,63 / -2,48)
I (2,00 / 0,00)

