M11 – S. 73 – Aufgabe 4 – ausführliche Lösung

b)

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1;\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

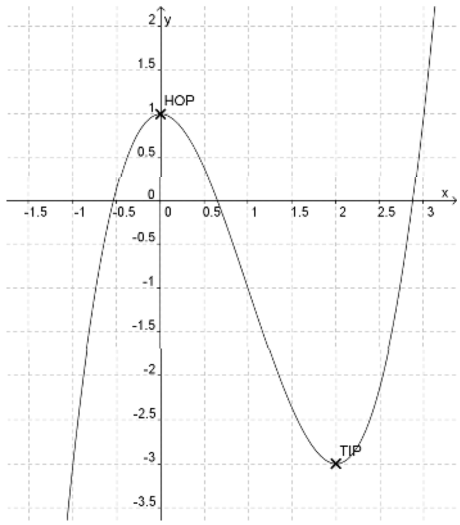
$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{11} = 0, x_{12} = 2$ (Stellen mit waagr. Tangenten)

Monotoniebestimmung: z.B. $f'(-1) = 3 > 0; f'(1) = -3 < 0;$

$f'(3) = 9 > 0$

y-Werte: $f(0) = 1, f(2) = -3$



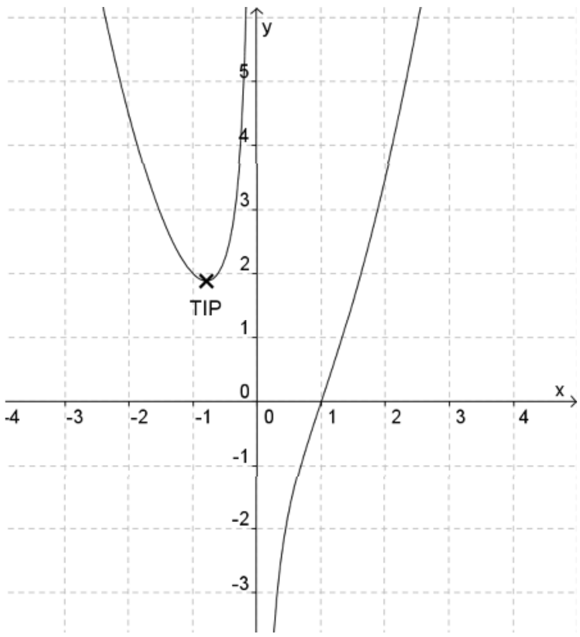
x	$]-\infty; \mathbf{0}]$	**0**	**[0;2]**	**2**	$[\mathbf{2}; \infty[$
$\boldsymbol{f'(x)}$	>0	0	<0	0	>0
$\boldsymbol{G_f}$	sms	HOP	smf	TIP	sms
Verlauf		-----		-----	
$\boldsymbol{f(x)}$		1		-3	

Zum Zeichnen wären die Nullstellen noch hilfreich. Die lassen sich mit unserem gegenwärtigen Wissensstand aber nur durch Ausprobieren ermitteln. Außerdem: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

c)

$f(x) = x^2 - \frac{1}{x} = x^2 - x^{-1} = \frac{x^3 - 1}{x}$

(Umformungen hilfreich zum Ableiten bzw. Nullstellensuchen)



$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$f'(x) = 2x - (-1)x^{-2} = 2x + \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x^3 + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{11} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} \approx -0{,}8$

(Stelle mit waagr. Tangente)

Monotoniebestimmung: z.B. $f'(-1) = -1 < 0;$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 2{,}24 > 0; f'(1) = 3 > 0$

y-Wert: $f\left(\sqrt[3]{-0{,}5}\right) \approx 1{,}89$

x	$]-\infty; \sqrt[3]{-\mathbf{0{,}5}}]$	$\sqrt[3]{-\mathbf{0{,}5}}$	$[\sqrt[3]{-\mathbf{0{,}5}};\mathbf{0}[$	**0**	$]\mathbf{0}; \infty[$
$\boldsymbol{f'(x)}$	<0	0	>0		>0
$\boldsymbol{G_f}$	smf	TIP	sms	$\mathbb{D}$-Lücke	sms
Verlauf		-----			
$\boldsymbol{f(x)}$		1,89			

Zum Zeichnen hilfreich: Nullstelle $x_{01} = 1$, senkrechte Asymptote $y = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$