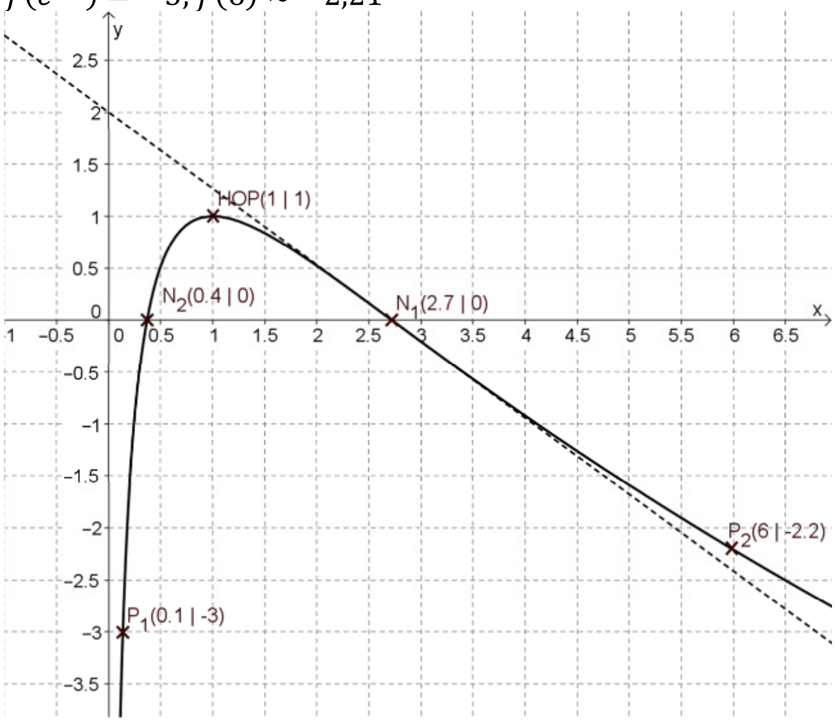
Gk 2005 – Infinitesimalrechnung I – Lösung

a) $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1-(\ln x)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\ln x)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = \pm 1$
$\ln x_{01} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_{01} = e$
$\ln x_{02} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x_{02} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = "1-(-\infty)^2" = -\infty$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = "1-(\infty)^2" = -\infty$

b) $f'(x) = -2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{-2\ln x}{x}$
$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{11} = 1$
Monotonie: $f'(x) = \dfrac{-2\ln x}{\underbrace{x}_{\text{immer}>0,\text{ wenn } x\in\mathbb{R}^+}}$
$0 < x < 1: \ln x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow G_f$ streng monoton steigend
$x > 1: \ln x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow G_f$ streng monoton fallend
$f(1) = 1-(\ln 1)^2 = 1$
$\Rightarrow HOP(1/1)$
Wegen der Grenzwerte und des HOP muss gelten: $\mathbb{W}_f =]-\infty; 1]$

c) Tangente an der Stelle $x_w = e$
$f(e) = 1-(\ln e)^2 = 1-1 = 0 \Rightarrow WEP(e/0)$ (ist auch Nullstelle!)
$f'(e) = -\dfrac{2}{e} =: m$
$y = m \cdot x + t \quad \Rightarrow \quad t = y - mx = 0 - \left(-\dfrac{2}{e}\right) \cdot e = 2$
Tangente: $y = -\frac{2}{e} \cdot x + 2$

d) $f(e^{-2}) = -3; f(6) \approx -2{,}21$



Gk 2009 – Infinitesimalrechnung II – Lösung

1a) $x_{01} = 0$ (da e^{2-x} immer > 0)

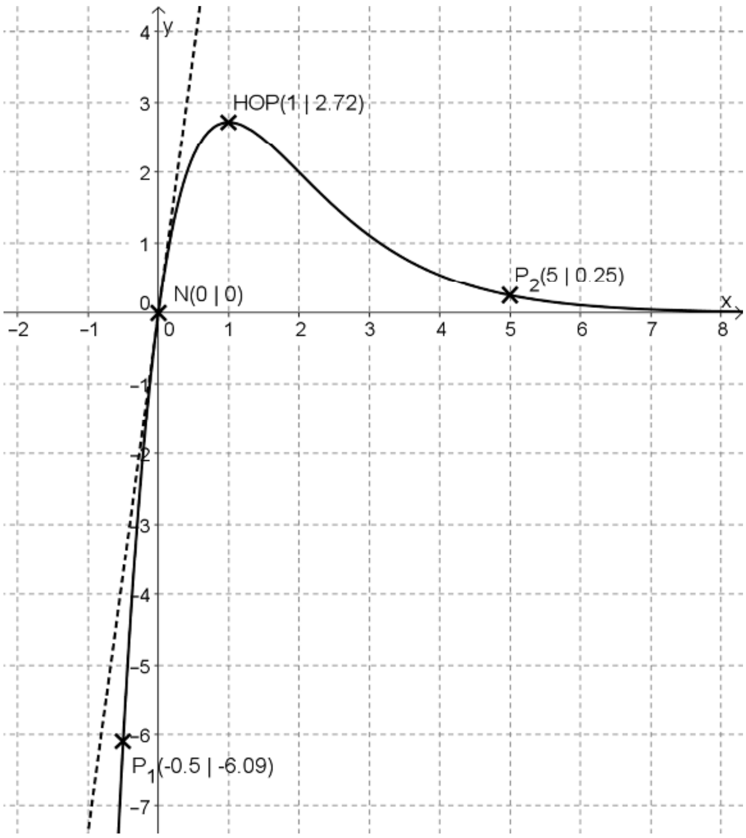
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = "-\infty \cdot e^{\infty}" = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x \cdot e^2}{e^x} = 0 \quad \text{(Merkhilfe oder: } e^x \text{ "gewinnt")}$$

b) $f'(x) = x \cdot e^{2-x} \cdot (-1) + 1 \cdot e^{2-x} = e^{2-x} \cdot (1-x)$

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 1 - x = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{11} = 1$ (Stelle mit waagrechter Tangente)

Monotonie: e^{2-x} ist immer > 0, also bestimmt $1 - x$ das Vorzeichen
$x < 1 \Rightarrow f'(x) > 0$: G_f sms
$x > 1 \Rightarrow f'(x) < 0$: G_f smf
Es muss also ein HOP sein.



y-Wert des Extremums
$f(1) = e$

$\Rightarrow HOP(1/e)$

$f(0) = 0$ ($\Rightarrow t = 0$); $f'(0) = e^2 =: m$
Tangente: $y = e^2 \cdot x$

d) $f(-0{,}5) = -6{,}1; f(5) = 0{,}3$

3a) gemeinsame Punkte: Gleichsetzen
$g_a(x) = f(x)$
$a \cdot x = x \cdot e^{2-x}$
$ax - xe^{2-x} = 0$
$x \cdot (a - e^{2-x}) = 0$

Wann ist einer der zwei Faktoren Null?
$\rightarrow x_1 = 0$ [bereits bekannt]
oder
$\rightarrow a - e^{2-x} = 0$

$a = e^{2-x}$
$\ln a = 2 - x$
$x_S = 2 - \ln a$