Aufgaben zum Urnenmodell

1. Eine Urne enthält elf gleichartige Kugeln, von denen vier schwarz und sieben weiß sind. Der Urne werden fünf Kugeln entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, genau zwei schwarze Kugeln zu ziehen.
   A) auf einmal
   B) mit Zurücklegen

2. Eine Laplace-Münze wird 10 Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 5 Mal Zahl zu erhalten?

3. Beim Erstellen von Aufgaben besteht bei einem gewissen Mathelehrer jedes Mal eine Chance von 55%, dass ihm eine Aufgabe einfällt, in der es um Zauberer, Raumschiffe oder ähnlich phantastische Dinge geht (kurz: P-Aufgabe). Berechnen Sie für eine Klausur mit 4 Aufgaben die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   A) Mindestens eine P-Aufgabe kommt vor.
   B) Genau eine P-Aufgabe ist dabei.
   C) Höchstens eine Aufgabe ist eine P-Aufgabe.
   D) Die erste Aufgabe ist eine P-Aufgabe.
   E) Mindestens zwei Aufgaben sind keine P-Aufgaben.

4. In einer Warenlieferung von 50 gleichartigen Teilen sei der Ausschuss 10%. Es werden 10 Teile ohne Zurücklegen entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für
   A) kein Ausschussstück
   B) höchstens ein Ausschussstück
   C) mehr als ein Ausschussstück

5. Ein Laplace-Würfel wird 5 Mal geworfen, Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, genau 2 Mal eine Sechs zu werfen.

6. Eine Lotterie besteht aus 1000 Losen und ist mit 50 Treffern ausgestattet. Jemand kauft fünf Lose. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er mindestens einen Treffer?

7. In einer Urne liegen zwei schwarze und drei weiße Kugeln. Vier Kugeln werden mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden höchstens zwei schwarze Kugeln gezogen?

8. Harry Potter und sein Freund Ron Weasley haben sich aus dem *Honigtopf* in Hogsmeade jeder einen Riesenbeutel *Bertie Botts Bohnen aller Geschmacksrichtungen* mitgebracht. In jedem Beutel befinden sich 120 Bohnen. Leider schmeckt ein Sechstel davon wirklich außerordentlich scheußlich, der Rest ist aber lecker (oder immerhin essbar). Da die beiden ihren Magen nicht zu sehr strapazieren wollen, beschließen sie, jeweils nur 10 der Bohnen zu essen.
   a) Berechne jeweils die Wahrscheinlichkeit in Prozent, dass Harry
      A) keine einzige scheußliche Bohne erwischt.
      B) genau eine scheußliche Bohne erhält.
      C) zumindest eine scheußliche Bohne schluckt.
      D) nur scheußliche Bohnen bekommt.
   b) Ron hat zu allem Überfluss einen *Nimmerleeren Beutel* erwischt, in dem jede gegessene Bohne sofort wieder erscheint. Berechne für Ron die Wahrscheinlichkeit in Prozent, dass er
      E) keine einzige scheußliche Bohne erwischt.
      F) genau eine scheußliche Bohne erhält.
      G) zumindest zwei scheußliche Bohnen erwischt.

Lösungen zu den Aufgaben zum Urnenmodell

1. $P(A) = P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{7}{3}}{\binom{11}{5}} = 45{,}5\%$ $\qquad$ $P(B) = P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{4}{11}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{11}\right)^3 = 34{,}1\ \%$

2. $P(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 24{,}6\%$

3. $P(A) = 1 - P(\text{keine P-Aufgabe}) = 1 - \binom{4}{4} \cdot 0{,}55^0 \cdot 0{,}45^4 = 1 - 0{,}45^4 = 95{,}9\%$

   $P(B) = P(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot 0{,}55^1 \cdot 0{,}45^3 = 20{,}0\%$

   $P(C) = P(\text{keine}) + P(\text{genau eine}) = 0{,}45^4 + P(B) = 24{,}1\%$

   $P(D) = 0{,}55 = 55\%$ (keine Aussage über die Aufgaben 2-4 enthalten)

   $P(E) = P(\text{mind. zwei nicht}) = P(\text{höchstens zwei}) = P(C) + P(X = 2)$

   $= 24{,}1\% + \binom{4}{2} \cdot 0{,}55^2 \cdot 0{,}45^2 = 60{,}9\%$

4. $P(A) = P(X = 0) = \frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{45}{10}}{\binom{50}{10}} = 31{,}1\%$

   $P(B) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 31{,}1\% + \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{45}{9}}{\binom{50}{10}} = 74{,}2\%$

   $P(C) = P(X > 1) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - 74{,}2\% = 25{,}8\%$

5. $P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 16{,}1\%$

6. $P = (X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{50}{0}\cdot\binom{950}{5}}{\binom{1000}{5}} = 22{,}7\%$

7. $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$

   $= \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4 + \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 82{,}1\%$

8. a) $P(A) = \frac{\binom{20}{0}\cdot\binom{100}{10}}{\binom{120}{10}} = 14{,}9\%$

   $P(B) = \frac{\binom{20}{1}\cdot\binom{100}{9}}{\binom{120}{10}} = 32{,}8\%$

   $P(C) = 1 - P(A) = 85{,}1\%$

   $P(D) = \frac{\binom{20}{10}\cdot\binom{100}{0}}{\binom{120}{10}} = 0{,}0\%$

   b) $P(E) = \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{20}{120}\right)^0 \cdot \left(\frac{100}{120}\right)^{10} = 16{,}2\%$

   $P(F) = \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{20}{120}\right)^1 \cdot \left(\frac{100}{120}\right)^9 = 32{,}3\%$

   $P(G) = 1 - \left(P(E) + P(F)\right) = 51{,}5\%$