Lösungen zu Signifikanztests **S. 110/8**

Es handelt sich um zwei Tests, je einer für die Polizei und für den Autoclub.

Die **Polizei** meint, dass der Anteil in Wirklichkeit (höchstens) 0,7 ist. Sie testet also diese Nullhypothese gegen die Annahme, der Anteil sei höher (**rechtsseitiger Signifikanztest**).

Nullhypothese H_0: p = 0,7 Gegenhypothese H_1: p > 0,7
Annahmebereich $A = \{0,\dots,k\}$ Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{k+1,\dots,n\}$

Signifikanzniveau 5%:

$$P_{0,7}^{200}(X > k) \le 0{,}05$$
$$1 - P_{0,7}^{200}(X \le k) \le 0{,}05$$
$$P_{0,7}^{200}(X \le k) \ge 0{,}95$$
$$\Rightarrow k = 151$$
$$A = \{0,\dots,151\},\ \overline{A} = \{152,\dots,200\}$$

Bei 154 angegurteten Fahrern muss die Polizei ihre Nullhypothese, dass höchstens 70% der Fahrer angegurtet sind, signifikant ablehnen.
Sie geht also von einem höheren Anteil angegurteter Fahrer aus.

Alternative Lösung: Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem tatsächlichen Anteil von nur 0,7 154 oder mehr Fahrer angegurtet sind, ist $P_{0,7}^{200}(X \ge 154) = 1 - P(X \le 153) = 1 - 0{,}98313 = 1{,}7\%$. *Dies ist unterhalb der Signifikanzgrenze von 5%, also liegt die „Trefferzahl“ 154 im Ablehnungsbereich und die Hypothese der Polizei muss abgelehnt werden.*

Der **Autoclub** meint, dass der Anteil in Wirklichkeit (mindestens) 0,7 ist. Er testet also diese Nullhypothese gegen die Annahme, der Anteil sei geringer (**linksseitiger Signifikanztest**).

Gegenhypothese H_1: p < 0,7 Nullhypothese H_0: p = 0,7
Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{0,\dots,k\}$ Annahmebereich: $A = \{k+1,\dots,n\}$

Signifikanzniveau 5%:

$$P_{0,7}^{200}(X \le k) \le 0{,}05$$
$$\Rightarrow k = 128$$
$$\overline{A} = \{0,\dots,128\},\ A = \{129,\dots,200\}$$

Bei 154 angegurteten Fahrern kann der Autoclub seine Nullhypothese, dass mindestens 70% der Fahrer angegurtet sind, *nicht* signifikant ablehnen.
Er sieht sich in seiner Annahme bestätigt.

Alternative Lösung: Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem tatsächlichen Anteil von 0,7 höchstens 154 Fahrer angegurtet sind, ist $P_{0,7}^{200}(X \le 154) = 0{,}98887 = 98{,}9\%$. *Dies ist weit oberhalb der Signifikanzgrenze von 5%, also liegt die „Trefferzahl“ 154 im Annahmebereich und das Testergebnis stützt die Nullhypothese (sie kann nicht signifikant abgelehnt werden).*

Ein Medikament A heilt eine Krankheit bei 85% der Patienten. Ein konkurrierender Arzneimittelhersteller behauptet, dass sein Medikament B noch besser wirkt, und führt eine Testreihe an 100 Patienten durch.

Variante 1: rechtsseitiger Signifikanztest mit $\alpha = 5\%$

Nullhypothese: Das neue Medikament B ist nicht besser als das alte Medikament A.

Nullhypothese H_0: $p = 0{,}85$ Gegenhypothese H_1: $p > 0{,}85$

Annahmebereich $A = \{0,\ldots,k\}$ Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{k+1,\ldots,n\}$

$$P_{0,85}^{100}(X > k) \leq 0{,}05 \Rightarrow \ldots \Rightarrow k = 91$$

$$A = \{0,\ldots,91\},\ \overline{A} = \{92,\ldots,100\}$$

Bedeutung des Fehlers 1. Art: Obwohl das neue Medikament nicht besser ist, wird es für besser gehalten. Bei einem solchen Fehler wird das Medikament also eingesetzt, obwohl es nicht besser ist.

$\Rightarrow$ Hersteller B hat **kein** Interesse daran, diesen Fehler zu beschränken, da er an ihm verdient.

$\Rightarrow$ Die Öffentlichkeit **hat** ein Interesse daran, diesen Fehler zu beschränken, da das neue Medikament sicher teurer ist als das alte.

Variante 2: linksseitiger Signifikanztest mit $\alpha = 5\%$

Nullhypothese: Das neue Medikament B ist besser oder zumindest genauso gut wie das alte Medikament A.

Gegenhypothese H_1: $p < 0{,}85$ Nullhypothese H_0: $p \geq 0{,}85$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{0,\ldots,k\}$ Annahmebereich: $A = \{k+1,\ldots,n\}$

$$P_{0,85}^{100}(X \leq k) \leq 0{,}05 \Rightarrow k = 78$$

$$\overline{A} = \{0,\ldots,78\},\ A = \{79,\ldots,100\}$$

Bedeutung des Fehlers 1. Art: Obwohl das neue Medikament mindestens genauso gut ist wie das alte, wird es für schlechter gehalten. Bei einem solchen Fehler wird das Medikament trotz seiner besseren Heilwirkung nicht eingesetzt.

$\Rightarrow$ Hersteller B **hat** ein Interesse daran, diesen Fehler zu beschränken, da er Verlust für ihn bedeutet.

$\Rightarrow$ Die Öffentlichkeit **hat** ebenfalls ein Interesse daran, diesen Fehler zu beschränken, da ein tatsächlich besseres Medikament natürlich genutzt werden sollte. Die Stärke des Interesses ist aber eine Kosten-Nutzen-Frage.

Bei höchstens 78 bzw. bei mindestens 92 geheilten Patienten sind sich bei beiden Varianten die Parteien einig. Liegt die Trefferzahl zwischen 79 und 91, profitiert Hersteller B von der Variante 2, während er bei Variante 1 Verlust macht.

$\Rightarrow$ Hersteller B wird also sicher die Variante 2 vorschlagen.

$\Rightarrow$ Für die Öffentlichkeit (z.B. die Krankenkassen) ist die Entscheidung nicht so einfach. Hier muss die verbesserte Heilwirkung gegen höhere Kosten abgewogen werden. Auch wegen möglicher noch unbekannter Nebenwirkungen wäre es ggf. besser, beim alten Medikament zu bleiben.

