

Testen von Hypothesen

In Marktrechwitz wird der Ausbau des Busnetzes diskutiert. Der Stadtrat vermutet, dass mindestens 30% aller Bürger daran interessiert sind. Da das Befragen aller Bürger sehr teuer wäre, wird eine Umfrage unter 100 zufällig ausgewählten Bürgern durchgeführt. Der Bürgermeister schlägt vor: Wenn bei der Umfrage weniger als 28 Befragte für den Ausbau sind, soll man die Vermutung als unbegründet ablehnen und den Ausbau nicht weiterverfolgen.

Hypothese	Mindestens 30% aller Bürger finden den Ausbau gut. Damit erhält man die Nullhypothese $H_0: p \geq 0,30$
Gegenhypothese	Weniger als 30% sind für den Ausbau, also $p < 0,30$
Stichprobe	unter $n = 100$ Bürgern; „Treffer“ = für den Ausbau
Entscheidungsregel	Wenn in der Stichprobe 0 bis 27 Bürger zustimmen, wird die Hypothese abgelehnt. Sind es 28 oder mehr, wird sie nicht abgelehnt

Zahl der Treffer	0	1	...	26	27	28	29	30	...	100
Folge	H_0 wird abgelehnt (Ablehnungsbereich) $\bar{A} = \{0,1, \dots, 26,27\}$					H_0 wird nicht abgelehnt („Annahmereich“) $A = \{28,29, \dots, 99,100\}$				

Achtung: Ein Stichprobenergebnis im Ablehnungsbereich bedeutet nicht, dass die Hypothese falsch ist, nur, dass der Test darauf hindeutet. Ebenso ist ein Treffer im Annahmereich kein Beweis für die Richtigkeit der Hypothese.

Falls in Wirklichkeit mindestens 30% der Bürger für den Ausbau sind, in der Umfrage aber zufällig (fast) nur Gegner zu Wort kommen, führt der Test zu einer Fehlentscheidung. Das wäre ein **Fehler 1. Art**: Obwohl H_0 in Wirklichkeit zutrifft, wird sie auf Grund des Tests abgelehnt (Treffer in \bar{A}). Im knappsten Fall ($p_{\text{dafür}} = 0,3$) beträgt diese Wahrscheinlichkeit:

$$P_{0,3}^{100}(X \leq 27) = 29,6\%$$

Sind in Wirklichkeit sehr wenige Bürger für den Ausbau, der Test ergibt aber viele Befürworter, ist das ein **Fehler 2. Art**: Obwohl H_0 in Wirklichkeit nicht zutrifft, wird sie nicht abgelehnt.

Wo die Stadt die Grenze zwischen A und \bar{A} zieht, bleibt grundsätzlich ihr überlassen. Die Wahl hat aber Einfluss auf die Höhe der möglichen Fehler. Verändert man die Entscheidungsregel, um den Fehler 1. Art zu minimieren, wird dafür der Fehler 2. Art größer (und umgekehrt). Will man beide Fehler minimieren, muss man den Stichprobenumfang n vergrößern (\rightarrow höhere Kosten).