Lösungen

$f(x) = (e^x - 2)^2;\ D_f = 0$

1. a) **Nullstelle: $x = \ln 2$**

$(f(x) = 0 \iff e^x - 2 = 0 \iff e^x = 2)$

Unmittelbar aus dem Verhalten der Exponentialfunktion an den Grenzen von 0 folgt:

$$\lim_{x \to -\infty} (e^x - 2)^2 = (0-2)^2 = 4$$

$$\lim_{x \to +\infty} (e^x - 2)^2 = \text{"}(\infty - 2)^2\text{"} = \infty$$

b) **Graphenpunkte mit waagrechter Tangente**

Die Anwendung der Kettenregel mit Nachdifferenzieren von $e^x - 2$ liefert als 1. Ableitung:

$f'(x) = 2 \cdot (e^x - 2) \cdot e^x$

Da nur der Term in der Klammer null werden kann, und zwar für $x = \ln 2$, besitzt G_f genau einen Punkt mit waagrechter Tangente, nämlich $E(\ln 2 \mid 0)$.

Art des Punkts mit waagrechter Tangente

1. Lösungsweg: mithilfe der 2. Ableitung

Dieser Lösungsweg ist hier empfehlenswert, da die 2. Ableitung ohnehin für die Untersuchung des Krümmungsverhaltens benötigt wird.

$f''(x) = 2[(e^x - 2)' \cdot e^x + (e^x - 2) \cdot (e^x)']$ Konstante 2 vorziehen, dann Produktregel

$= 2[e^x \cdot e^x + (e^x - 2) \cdot e^x]$ e^x ausklammern

$= 2e^x(2e^x - 2)$ Faktor 2 ausklammern

$= 4e^x(e^x - 1)$

$f''(\ln 2) = 4 \cdot 2 \cdot (2-1) > 0 \Rightarrow$ E ist Tiefpunkt.

2. Lösungsweg: bisherige Informationen über G_f heranziehen

Da $E(\ln 2 \mid 0)$ der einzige Punkt mit waagrechter Tangente ist und auf der x-Achse liegt, folgt aus den in Teilaufgabe 1a berechneten Grenzwerten, dass E ein Tiefpunkt sein muss. Bei dieser Art der Argumentation empfiehlt sich das Anfertigen einer groben Skizze.

Weitere Möglichkeiten, die Art des Punkts mit waagrechter Tangente festzulegen:

- Anfertigen einer Monotonietabelle
- Ausrechnen von Funktionswerten rechts und links von der Stelle $x = \ln 2$
- Beobachtung, dass der Graph von f nie unterhalb der x-Achse verläuft

Krümmungsverhalten und Wendepunkt

Aus der faktorisierten Form der 2. Ableitung erkennt man, dass sie nur an der Stelle $x = 0$ gleich null wird und ihr Vorzeichen allein durch den Term $e^x - 1$ bestimmt wird:

$x < 0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow G_f$ ist rechtsgekrümmt.
$x > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow G_f$ ist linksgekrümmt.

Damit ist $W(0 \mid 1)$ als einziger Wendepunkt nachgewiesen.

c) Die x-Koordinate eines Schnittpunkts von G_f mit der Geraden $y = 4$ erfüllt die Gleichung $(e^x - 2)^2 = 4$.

1. Fall: $e^x - 2 = 2 \iff e^x = 4 \iff x = \ln 4$
2. Fall: $e^x - 2 = -2 \iff e^x = 0$ nicht erfüllbar

Also gibt es genau einen Schnittpunkt S mit den Koordinaten $x_S = \ln 4 = 2\ln 2 \approx 1{,}4$ und (klarerweise) $y_S = 4$.

Hinweis: Ausquadrieren der linken Seite der Schnittpunktsgleichung führt ebenfalls schnell auf die Lösung.

d) **Gleichung der Tangente t im Wendepunkt $W(0 \mid 1)$**

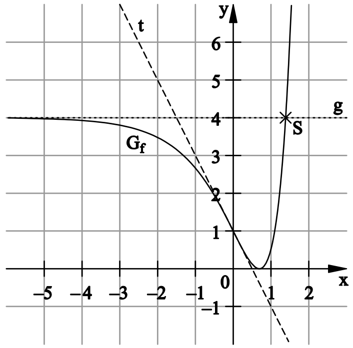
Die Steigung der Wendetangente beträgt:
$f'(0) = 2 \cdot e^0 \cdot (e^0 - 2) = 2 \cdot (-1) = -2$

Ansatz für t: $y = -2x + c$

Einsetzen der Wendepunktskoordinaten liefert $c = 1$.

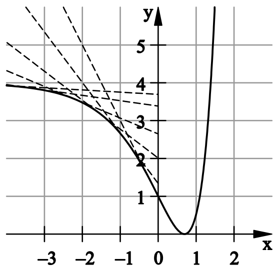
t: $y = -2x + 1$

Funktionswert:
$f(-2) \approx 3{,}5$

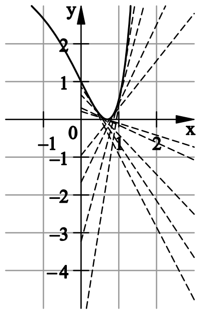


e) Bei „$-\infty$“ verläuft die Tangente im Graphenpunkt P (fast) waagrecht und neigt sich dann zu negativen Steigungen, die ihren kleinsten Wert im Wendepunkt mit $m = -2$ erreichen. Fährt P weiter nach rechts, nimmt die Tangentensteigung wieder zu und strebt über $m = 0$ im Tiefpunkt immer größeren Werten zu.
Die Steigungen nehmen also alle Werte aus dem Intervall $[-2; \infty[$ an.

Bei der oben beschriebenen Bewegung von P und seiner Tangente wandert der Schnittpunkt mit der y-Achse von $(0 \mid 4)$ weg auf der y-Achse entlang und sinkt dabei immer tiefer. Der y-Achsenabschnitt durchläuft (von rechts nach links) das Intervall $]-\infty; 4[$.



Bewegung der Tangente, wenn der Berührpunkt von links her gegen den Wendepunkt wandert.



Bewegung der Tangente, wenn der Berührpunkt von W aus nach rechts wandert.