Algebraische Strukturen

Gruppe

Eine nichtleere Menge M von Elementen mit einer Verknüpfung (Rechenvorschrift) $*$ heißt genau dann **Gruppe (M, $*$)**, wenn folgende Rechenvorschriften gelten:

1. **Eindeutigkeit** und **Abgeschlossenheit:** Für $a,b \in M$ gilt: $a * b = c$, wobei $c \in M$
2. **Assoziativität**: Für $a,b,c \in M$ gilt: $a*(b*c) = (a*b)*c$
3. Es gibt genau ein **neutrales Element** $e \in M$, so dass für $a \in M$ gilt: $a*e = e*a = a$
4. Zu jedem $a \in M$ gibt es ein **inverses Element** $\overline{a} \in M$, so dass: $a*\overline{a} = \overline{a}*a = e$

Gilt außerdem für die Verknüpfung $*$ für alle $a,b \in M$ das **Kommutativgesetz** $a*b = b*a$, so heißt (M; $*$) **kommutative** oder **abelsche Gruppe**.

Beispiele und Ergänzungen:

($\mathbb{Q}$, +) und ($\mathbb{Z}$, +) sind Gruppen. ($\mathbb{Q}$, $\cdot$) ist keine Gruppe, da es kein Inverses zu 0 gibt. Dementsprechend ist ($\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\cdot$) eine Gruppe.

Handelt es sich bei der Verknüpfung um eine Addition, wird das neutrale Element mit 0 und das inverse Element zu a mit $-a$ bezeichnet.

Vektorraum

Man nennt V genau dann einen **Vektorraum über $\mathbb{R}$** oder **reellen Vektorraum** (V, $\mathbb{R}$, +, $\cdot$), wenn gilt:

1. (V, +) ist eine **kommutative Gruppe.**
2. (V, $\mathbb{R}$, +, $\cdot$) erfüllt die Gesetze der **S-Multiplikation**. Für $r, s \in \mathbb{R}$ und $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt:

   a) **V-Distributivgesetz**: $r\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = r\cdot\vec{a} + r\cdot\vec{b}$

   b) **S-Distributivgesetz**: $(r+s)\cdot\vec{a} = r\cdot\vec{a} + s\cdot\vec{a}$

   c) **gemischtes Assoziativgesetz**: $r\cdot(s\cdot\vec{a}) = (r\cdot s)\cdot\vec{a}$

   d) **unitäres Gesetz**: $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$

Wichtig für den Unterricht:

$\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sind reelle Vektorräume (bezüglich + und $\cdot$).

Andere Strukturen

Besonders wichtig für die Algebra sind noch **Ringe** (eine Menge mit zwei Rechenoperationen unter speziellen Bedingungen) und **Körper** (ein spezieller Ring). Außerdem gibt es die „Verkleinerungsformen" **Untergruppen**, **Unterringe** und **Unterkörper** sowie **Ideale** (ein spezieller Unterring).

Ein echter Mathematik-Professor kapiert übrigens nie, warum Studenten zu lachen beginnen, wenn er mit leuchtenden Augen von schönen Körpern schwärmt.

Alles Weitere in der Vorlesung *Algebra I* (meist im 3. Mathe-Semester) an der Uni. Darin beweist man dann (mathematisch exakt und daher unwiderlegbar) Sätze wie „Körper haben nur triviale Ideale."

