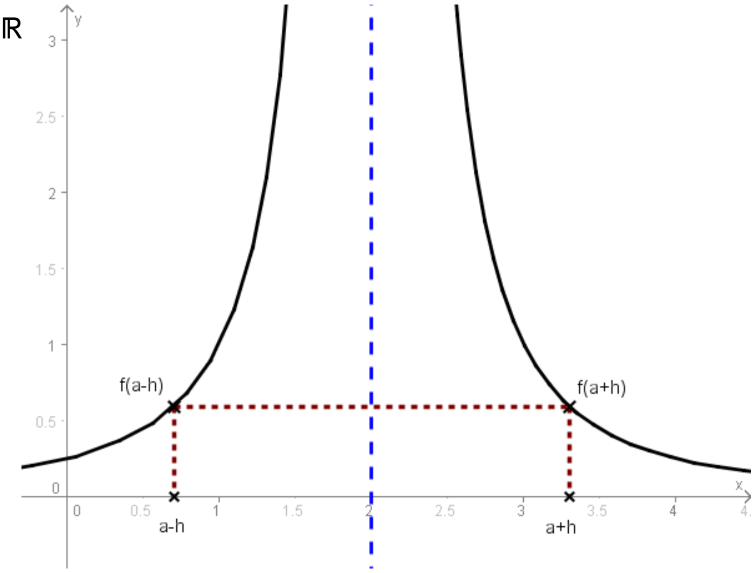
Erweiterte Symmetrie von Graphen

Symmetrie bezüglich einer Parallelen zur y-Achse ($x = a$)

Voraussetzung: $f(a+h) = f(a-h)$ für alle $h \in \mathbb{R}$



Beispiel: $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ mit Asymptote $x = 2$

$$f(2+h) = \frac{1}{(2+h-2)^2} = \frac{1}{h^2}$$

$$f(2-h) = \frac{1}{(2-h-2)^2} = \frac{1}{h^2} = f(2+h)$$

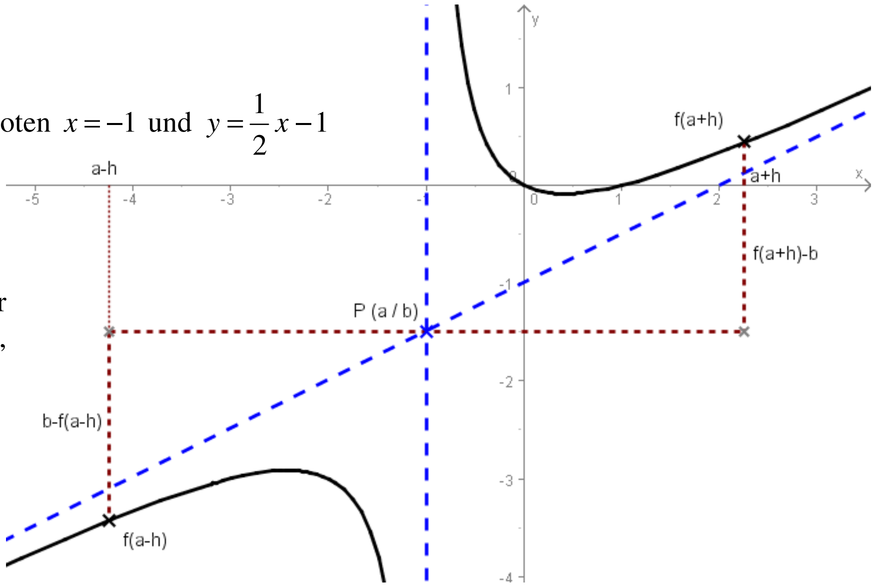
$\Rightarrow$ $f(x)$ ist symmetrisch zu $x = 2$.

Symmetrie bezüglich eines beliebigen Punktes P(a/b)

Voraussetzung: $f(a+h) - b = b - f(a-h)$ für alle $h \in \mathbb{R}$

bzw. $f(a+h) + f(a-h) = 2b$ für alle $h \in \mathbb{R}$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{2(x+1)}$ mit Asymptoten $x = -1$ und $y = \dfrac{1}{2}x - 1$



Der Symmetriepunkt kann nur der Schnittpunkt der Asymptoten sein, also P(–1/–1,5)

$$f(-1+h) + 1{,}5 = \frac{(-1+h)^2 - (-1+h)}{2(-1+h+1)} + 1{,}5 = \frac{1 - 2h + h^2 + 1 - h + 3h}{2h} = \frac{h^2 + 2}{2h}$$

$$-1{,}5 - f(-1-h) = -1{,}5 - \frac{(-1-h)^2 - (-1-h)}{2(-1-h+1)} = \frac{3h - (1 + 2h + h^2 + 1 + h)}{-2h} = \frac{-(h^2+2)}{-2h} = \frac{(h^2+2)}{2h}$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist symmetrisch zu P(–1/–1,5).